Matematika M2 b - ukázkový test.

---

1 . a) (i) V a W jsou vektorové prostory a L zobrazení z V do W. Co znamená, že L je lineární zobrazení? (2b)

(ii) Nechť L je lineární zobrazení V do W a $\vec{o}$ nechť je nulový prvek W.

Ukažte, že množina vektorů $\vec{v} \in V$, pro které platí $L(\vec{v}) = \vec{o}$, je podprostor prostoru V. (3b)

b) Nechť L je lineární zobrazení, $L : R^3 \to R^3$, pro které platí:

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Najděte $L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ pro lib.vektor $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in R^3$. (4b)

c) Vysvětlete, jak je definováno inverzní zobrazení k zobrazení L. (1b)

Existuje k danému zobrazení L inverzní zobrazení ? Pokud ano, najděte je. (5b)

2. a) Ukažte, že množina všech řešení diferenciální rovnice $y'' + py' + qy = 0$ ($p, q \in R$) tvoří vektorový prostor (V_H). (3b)

b) Co fundamentálním systémem řešení diferenciální rovnice $y'' + py' + qy = 0$ ($p, q \in R$) ? (1b)

Popište fundamentální systém řešení pro všechny možnosti řešení charakteristická rovnice. (3b)

c) Najděte řešení diferenciální rovnice $y'' + y = 2\cos x + x^2 + 1$, které splňuje počáteční podmínky $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$. (8b)

3. Je dána funkce

$$f(x,y) = \sqrt{y + \frac{1}{x}}\ .$$

a) Najděte a načrtněte její definiční obor. Je $D(f)$ množina otevřená nebo uzavřená? Tvrzení odůvodněte. (3b)

b) Vypočítejte $\nabla f(-1,2)$. (2b)

c) Napište, co znamená, že funkce $f : M \subset R^n \to R$ má totální diferenciál v bodě $a \in M$ (M je otevřená množina) a co nazýváme totálním diferenciálem funkce f v bodě a. (3b)

d) Ukažte, že funkce f je v bodě $(-1,2)$ diferencovatelná a určete v tomto bodě totální diferenciál funkce f. (3b)

e) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v $(-1,2,1)$. (2b)

f) Nabývá funkce f globálních extrémů ve svém definičním oboru nebo lokálních extrémů uvnitř ? (2b)

4. a) Formulujte nutnou podmínku a některou z postačujících podmínek existence dvojného Riemannova integrálu, (4b)

b) Vypočítejte objem tělesa, které je ohraničené rovinou $z = 0$ a válcovými plochami $z = 4 - y^2$ a $y = \dfrac{x^2}{2}$. (8b)

a dobrovolně navíc můžete řešit i

c) Vypočítejte hmotnost tělesa, ohraničeného rovinou $z = 4$ a plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, má-li těleso v bodě (x, y, z) hustotu $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (8b)

5. a) Vysvětlete, co znamená, že rovnicí $F(x,y,z)=0$ je v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) definována implicitně funkce . (1b)
$z = z(x, y)$.
Formulujte větu o implicitní funkci pro tento případ. (3b)
b) Ukažte, že rovnicí

$$z^4 - x^3 y z^2 - x z + y^3 = 0$$

je definována v okolí bodu $(1,1,1)$ implicitní funkce $z = z(x, y)$. (4b)
c) Pomocí lineární aproximace vypočítejte přibližně hodnotu z (1,01; 0,96). (7b)

nebo si můžete místo příkladu s implicitně definovanou funkcí zvolit příklad

5. a) Definujte pojmy
i) potenciální vektorové pole v oblasti $\omega \subset R^3 \left(R^2\right)$ a potenciál vektorového pole v oblasti $\omega \subset R^3 \left(R^2\right)$; (2b)
ii) vektor rotace $\operatorname{rot} \vec{f}$ pro hladké vektorové pole $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, zadané na oblasti $\omega \subset R^3$. (2b)
b) Formulujte nutnou podmínku i postačující podmínky pro potenciálnost vektorového pole v oblasti $\omega \subset R^2$. (2b)

c) Je dáno vektorové pole $$\vec{f}(x, y) = \left(\frac{y}{1 + x^2 y^2}, \frac{x}{1 + x^2 y^2} \right).$$

i) Ukažte, že toto pole je potenciální v celé rovině. (2b)
ii) Určete potenciál tohoto pole. (5b)
iii) Vypočítejte křivkový integrál tohoto pole $\vec{f}$ po kladně orientované kružnici o středu v počátku a poloměru *R*. (2b)